高等代数作业注意点

主讲: 方颖珏
助教: 曹杰

2025 年 3 月 29 日

第 1 次作业

6.3 节 3, 4, 8

补充. 求下面向量组的一个极大无关组.

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1),\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,1,0),\ \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,1,3),\ \boldsymbol{\alpha}_4 = (3,1,2).$$

第 2 次作业

6.4 节 4, 8

第 3 次作业

6.5 节 3, 4

6.3 向量的线性相关性

3. 令 $\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \in F^n$, $i = 1, 2, \ldots, n$. [a] 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关当且仅当行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

[a] 原题记号修改: 将 $\boldsymbol{\alpha}_i = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n}) \in F^n$ 修改为

$$\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \in F^n.$$

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关. 则有不全为 0 的 $k_1, k_2, \ldots, k_n \in F$ 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = 0$. 写成矩阵的形式, 就是

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

或者

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

注意这里的两个矩阵相差一个转置, 容易搞混.

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in F^n$, $i = 1, \dots, m$ 线性无关. 对每一个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 任意添上 p 个数, 得到 F^{n+p} 的 m 个向量

$$\boldsymbol{\beta}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}, b_{i1}, \dots, b_{ip}), i = 1, \dots, p.$$

证明 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_m\}$ 也线性无关.

两种方法: 第一种用向量表示; 第二种用分量表示.

用向量表示. 设 $\boldsymbol{\gamma}_i = (b_{i1}, \dots, b_{ip}), i = 1, \dots, p$. 则

$$\boldsymbol{\beta}_i = (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\gamma}_i), i = 1, \dots, p.$$

设 $k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\beta}_m = 0_{n+p}$, $k_1, k_2, \dots, k_m \in F$. 则

$$(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m, k_1\boldsymbol{\gamma}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\gamma}_m) = (0_n, 0_p).$$

从而 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = 0_n$. 由 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 线性无关可得 $k_1 = \cdots = k_m = 0$. 从而 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_m\}$ 线性无关.

用分量表示. 方法类似, 注意区分不同的下标.

8. 设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$ 线性表示, 但不能由 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}\}$ 线性表示. 证明, 向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}, \boldsymbol{\alpha}_r\}$ 与向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}, \boldsymbol{\beta}\}$ 等价.

由题设, 存在 $k_1, \ldots, k_r \in F$ 使得 $\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r$. 因为 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{r-1}\}$ 线性表示, 所以 $k_r \neq 0$. 移项可得

$$\boldsymbol{\alpha}_r = -\frac{k_1}{k_r}\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{k_2}{k_r}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \frac{k_{r-1}}{k_r}\boldsymbol{\alpha}_{r-1} + \frac{1}{k_r}\boldsymbol{\beta}.$$

注 1. 题中 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可能是线性相关的, 所以无法直接使用定理 6.3.2(替换定理).

注 2. 发现好几个同学写成

$$\boldsymbol{\alpha}_r = -\frac{k_1}{k_r}\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{k_2}{k_r}\boldsymbol{\alpha}_2 - \cdots - \frac{k_{r-1}}{k_r}\boldsymbol{\alpha}_{r-1} - \frac{1}{k_r}\boldsymbol{\beta}.$$

后来发现有的是抄习题解答所致. 还请这部分同学自己斟酌. 我只批改作业, 记录作业是否提交, 并不给作业打分.

补充. 求下面向量组的一个极大无关组.

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1),\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,1,0),\ \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,1,3),\ \boldsymbol{\alpha}_4 = (3,1,2).$$

将 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 排成一个矩阵, 通过行变换可得它的一个极大无关组含有三个向量. 并可取极大无关组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3+r_2}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4-3r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

对于这个题目, 可以验证 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 中的任意三个都构成一个极大无关组.

对于一般的一组向量 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$. 假设它的一个极大无关组有 r 个向量. 根据推论 6.3.2, 它的任意一个极大无关组有 r 个向量. 但在 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 中任意取 r 个向量不一定构成极大无关组.

6.4 基和维数

8. 设 W 是 n 维向量空间 V 的一个子空间, 且 $0 < \dim W < n$. 证明: W 在 V 中有不止一个余子空间.

设 W 的一个基为 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$. 由扩基定理, 存在 $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n \in V$ 使得 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 是 V 的基. 令 $W' = L(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n)$. 则 $V = W \oplus W'$.

再令 $W'' = L(\alpha_{r+1} + \alpha_1, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n)$. 则可以验证 $V = W \oplus W''$ 且 $W'' \neq W'$. 因此 W 在 V 中有不止一个余子空间.

注 1. 设 W 的一个基为 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$. 由扩基定理, 存在 $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n \in V$ 使得 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 是 V 的基. 令 W_1 是 W 的一个余子空间, 即 $V = W \oplus W_1$. 从这里无法得出 $\{\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$ 是 W_1 的基.

注 2. 部分同学直接考虑了 $V = F^n$. 按照定义, 数域 F 上的一个 n 维向量空间 V 就是满足一些线性关系的一个非空集合. 比如

$$F^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in F\}$$

是 F 上的一个 n 维向量空间. 再比如, 次数小于或等于 $n-1$ 的多项式构成的空间

$$\{a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} \mid a_0, \dots, a_{n-1} \in F\}$$

也是 F 上的一个 n 维向量空间. 因此数域 F 上的一个 n 维向量空间 V 不一定是 F^n.

注 3. 在叙述定理以及写证明的过程中, 如果某个记号首次出现, 需要先指明或定义它是什么.

6.5 坐标

4. 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,-1),\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,-1,3),\ \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,-1,0);$$
$$\boldsymbol{\beta}_1 = (2,1,5),\ \boldsymbol{\beta}_2 = (-2,3,1),\ \boldsymbol{\beta}_3 = (1,3,2).$$

证明 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 和 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 都是 $\mathbb{R}^3$ 的基. 求前者到后者的过渡矩阵.

计算过程与本节例 5 一样: 先分别求出关于标准基的过渡矩阵. 令

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1,0,0), \boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0,1,0), \boldsymbol{\varepsilon}_3 = (0,0,1).$$

则

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} =: (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)A,$$

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} =: (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)B.$$

于是 $|A| = 8$, $|B| = -34$. 从而

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)B = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)A^{-1}B.$$

因此 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 到 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 的过渡矩阵为

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{1}{2} & \frac{7}{4} \\ \frac{9}{4} & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

过渡矩阵的定义参见第 238 页.

```matlab
% matlab验算
A = sym(...
[ 1  0  1
  2 -1 -1
 -1  3  0]);
B = sym(...
[ 2 -2  1
  1  3  3
  5  1  2]);
```

```
det(A)
det(B)
inv(A)*B
```

注. 以上 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 都是行向量, 且满足

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3 \end{pmatrix}.$$

令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

则

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3)A, \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix} = A^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3 \end{pmatrix}.$$

取转置可得列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\varepsilon}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\varepsilon}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\varepsilon}_3^{\mathrm{T}}$ 之间的等式.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = A^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\varepsilon}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\varepsilon}_3^{\mathrm{T}})A.$$

注意区分以上四个等式.