高等代数作业注意点

主讲: 郭辉
助教: 曹杰

2025 年 3 月 31 日

第 1 次作业

6.1 节 3, 4, 6

6.2 节 2, 3

6.3 节 3, 6, 8

补充 1. 判断向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,2,0,-2)$ 是否可由向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,0),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,1),$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1,1),\ \boldsymbol{\alpha}_4=(0,1,1,1)$$

线性表示.

补充 2. 判断下列向量组是线性相关还是线性无关.

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,-1,0),\ \boldsymbol{\beta}_2=(2,0,1),$$
$$\boldsymbol{\beta}_3=(-1,2,0),\ \boldsymbol{\beta}_4=(0,2,-1).$$

补充 3. 求下面向量组的一个极大无关组.

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,0),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,3),\ \boldsymbol{\alpha}_4=(3,1,2).$$

6.4 节 1(ii), 2(i), (ii), 4

第 2 次作业

6.4 节 8

6.5 节 2(iii), 3, 4

6.6 节 2

6.7 节 2, 3

补充. 求以下向量组的秩和一个极大无关组.

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\2\\6\\0\\-8\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\0\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\-5\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}3\\-8\\5\\-2\\11\end{pmatrix}.$$

第 3 次作业

6.7 节 5

补充. 求下列非齐次线性方程组的通解及其导出齐次方程组的一个基础解系.

$$\begin{cases}3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3,\\6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7,\\9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13.\end{cases}$$

6.1 定义与例子

4. 令 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3 = (0,0,1)$. 证明 $\mathbb{R}^3$ 中的每一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以唯一地表示为 $\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + a_3\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 的形式, 这里 $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

需要说明表示的存在性与表示的唯一性.

表示的存在性. 设 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3$. 则存在 $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ 使得 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)$. 于是,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha} &= (a_1, a_2, a_3)\\ &= (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3)\\ &= a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + a_3\boldsymbol{\varepsilon}_3.\end{aligned}$$

这就说明了题目要求的表示的存在性.

表示的唯一性略.

6. 证明: 数域 F 上一个向量空间如果含有一个非零向量, 那么它一定含有无限多个向量.

由第 25 页定理 1.5.1 可知 F 包含有理数域，从而 F 是无限集.

设 V 是 F 上一个有非零向量的向量空间. 则在 V 中可以取一个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$. 由第 214 页命题 6.1.2(4) 可知对于 F 中不同的两个数 a_1 与 a_2, 我们有 $a_1\boldsymbol{\alpha} \neq a_2\boldsymbol{\alpha}$.

这样我们就构造了 V 中的无限多个向量 $\{a\boldsymbol{\alpha} \mid a \in F\}$.

6.2 子空间

3. 设 W_1, W_2 是向量空间 V 的子空间. 证明: 如果 V 的一个子空间既包含 W_1 又包含 W_2, 那么它一定包含 $W_1 + W_2$.

转化为更加具体的表述: 设 W 是 V 的一个既包含 W_1 又包含 W_2 的子空间, 需要证明 $W_1 + W_2 \subset W$.

任取 $x \in W_1$, $y \in W_2$. 则 $x \in W$, $y \in W$. 因为 W 是子空间, 所以关于加法封闭, 从而 $x + y \in W$. 这就证明了 $W_1 + W_2 \subset W$.

6.5 坐标

4. 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,3),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,0);$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(2,1,5),\ \boldsymbol{\beta}_2=(-2,3,1),\ \boldsymbol{\beta}_3=(1,3,2).$$

证明 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 和 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 都是 $\mathbb{R}^3$ 的基. 求前者到后者的过渡矩阵.

计算过程与本节例 5 一样: 先分别求出关于标准基的过渡矩阵. 令

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0),\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1).$$

则

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-1&-1\\-1&3&0\end{pmatrix}=:(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)A,$$

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}2&-2&1\\1&3&3\\5&1&2\end{pmatrix}=:(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)B.$$

于是 $|A|=8$, $|B|=-34$. 从而

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)B=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)A^{-1}B.$$

因此 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 到 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 的过渡矩阵为

$$A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{7}{4}&\frac{1}{2}&\frac{7}{4}\\\frac{9}{4}&\frac{1}{2}&\frac{5}{4}\\\frac{1}{4}&-\frac{5}{2}&-\frac{3}{4}\end{pmatrix}.$$

过渡矩阵的定义参见第 238 页.

```
% matlab验算
A = sym(...
[ 1  0  1
  2 -1 -1
 -1  3  0]);
B = sym(...
[ 2 -2  1
  1  3  3
  5  1  2]);
```

```
det(A)
det(B)
inv(A)*B
```

6.6 向量空间的同构

2. 设 $f: V \to W$ 是向量空间 V 到 W 的一个同构映射, V_1 是 V 的一个子空间. 证明 $f(V_1)$ 是 W 的一个子空间.

本题主要考察子空间的定义: 关于加法和数乘封闭.

任取 $\beta_1, \beta_2 \in f(V_1)$, $k_1, k_2 \in F$. 则存在 $\alpha_1, \alpha_2 \in V_1$ 使得 $f(\alpha_1) = \beta_1$, $f(\alpha_2) = \beta_2$. 于是

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 = k_1 f(\alpha_1) + k_2 f(\alpha_2) = f(k_1\alpha_2 + k_2\alpha_2) \in f(V_1).$$

6.7 矩阵的秩　齐次线性方程组的解空间

2. 证明: 秩$(A+B) \le$ 秩$(A)+$ 秩(B).

证明 1. 设 A, B 是 $m \times n$ 型矩阵. 考虑 A, B 的列向量. 设

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}.$$

设 A 的秩为 r, 取 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 的一个极大无关组 $\{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}\}$.

设 B 的秩为 s, 取 $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ 的一个极大无关组 $\{\beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_s}\}$.

$A+B$ 的列向量组 $\{\alpha_1+\beta_1, \ldots, \alpha_n+\beta_n\}$ 可由 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n\}$ 线性表出, 进而可由 $\{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}, \beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_s}\}$ 线性表出. 因此

$$\text{秩}(A+B) \le \text{秩}\{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}, \beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_s}\} \le r+s = \text{秩}(A) + \text{秩}(B).$$

注意区分上面标彩色的下标.

证明 2 (来自某同学).

$$r(A)+r(B) = r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A & 0 \\ A & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A & 0 \\ A+B & B \end{pmatrix}$$
$$\ge r\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A+B & B \end{pmatrix} \ge r\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A+B & 0 \end{pmatrix} = r(A+B).$$

注. 部分同学尝试用第 248 页上的对角化来做这个题目. 设 A, B 是 $m \times n$ 型矩阵, 秩分别为 r, s. 考虑对角化

$$A = P_1 \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1, \ B = P_2 \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2.$$

因为 $P_1 = P_2$ 且 $Q_1 = Q_2$ 不一定成立, 所以无法进一步化简 $A + B$.

3. 设 A 是一个 m 行的矩阵, 秩$A = r$. 从 A 中任取出 s 行, 作一个 s 行的矩阵 B. 证明: 秩$B \geq r + s - m$.

设 A 的行向量组为 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. 取 A 的一个极大无关组 $\{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$, 其余的 $m - r$ 个向量记作 $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-r}\}$.

由题目, A 中取了 s 行构成矩阵 B. 设 s_1 行在 $\{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$ 中取, 其他 $s - s_1$ 行在 $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-r}\}$ 中取.

那么, 秩$B \geq s_1$ 且 $s - s_1 \leq m - r$. 于是, 秩$B \geq s_1 \geq r + s - m$.

补充. 求以下向量组的秩和一个极大无关组.

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 5 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

```
% matlab验算
A = [
 0  1 -1  3
 2 -3  2 -8
 6  2 -5  5
 0  0  0 -2
-8  4  0 11];
rank(A)
rank(A(:,[1 2 3]))
rank(A(:,[1 2 4]))
rank(A(:,[1 3 4]))
rank(A(:,[2 3 4]))
ans =
       3
```

```
ans =
     2
ans =
     3
ans =
     3
ans =
     3
```

补充. 求下列非齐次线性方程组的通解及其导出齐次方程组的一个基础解系.

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3, \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7, \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13. \end{cases}$$

化简可得

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3=1, \\ x_4=1. \end{cases}$$

将 x_2, x_3 作为自由变量, 则我们有通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

我们知道通解由线性方程组唯一确定, 但是它的表示可能不唯一. 比如, 通过某个计算过程, 我们可能得到

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

平时的计算容易算错, 但是我们可以把结果代回原方程组进行验算, 以减少计算错误.

特解代回去, 成立.

基础解系代回齐次方程组, 成立.

基础解系线性无关, 成立.

基础解系中向量个数 = 未知数个数 − 矩阵的秩, 成立.

一般验证前面三个. 第四个要算矩阵的秩, 有点麻烦, 可以不进行. 如果验证后前面三个都对, 基本上就计算正确了.

PS. 批改作业时: 是否与已有答案一致. 不一致的话: 特解代回去, 基础解系代回齐次方程组, 基础解系线性无关, 基础解系向量个数 = 参考答案的基础解系向量个数.